Содержание

1. Вероятностная модель

- математическая модель реального процесса или явления, содержащего элемент случайности (неустранимой неопределённости)

2. Условия адекватности модели:

1. Наличие случайности (неопределённости)
2. Воспроизводимость с учётом случайности (этот же эксперимент можно воспроизвести в одних и тех же условия многое число раз)
3. Устойчивость частот событий $\frac{n(A)}{n} \to p$

3. Парадокс Бертрана

Какова вероятность того, что длина произвольной хорды внутри окружности превосходит длину стороны правильного вписанного треугольника?

1. $p = \frac{1}{3}$. Фиксируем начало хорды в одной из вершин, она будет длиннее стороны этого треугольника, когда будет его пересекать.
2. $p = \frac{1}{4}$. Случайным образом в круге выберем точку. Она определяет единственную хорду, серединой которой эта точка является. Эта хорда длиннее стороны треугольника, когда её середина лежит во вписанной в правильный треугольник окружности.
3. $p = \frac{1}{2}$. Любая из перпендикулярных диаметру хорд, пересекающая его не дальше, чем R/2 от центра окружности. Так как в постановке задачи не оговорено Ω, а сказано только «произвольно выбранная». Следовательно, правильный ответ — любое число от 0 до 1

4. Вероятностное пространство

- тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где

Ω - непустое множество - пространство элементарных исходов; $\omega \in \Omega$ - элементарный исход

$\mathcal{A}$ - σ-алгебра подмножеств Ω:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$\mathbb{P}$ - вероятностная мера $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$

1) $\mathbb{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} :\ A_i \bigcap A_j = 0$ при $i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

5. Математическое ожидание (Формулы в дискретном и непрерывном)

Пусть ξ - сл.в., заданная на вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, dF_{\xi}(x)$$

- В дискретном случае $\mathbb{E}(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$. Существует только если этот ряд сходится абсолютно.
- В абсолютно непрерывном случае $\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x)\, dx$

Если интеграл $\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ расходится, то говорят, что мат.ожидания не существует.

Свойства:

1. Линейность
2. Единственность
3. Неустойчиво к выбросам
4. Не всегда существует

6. Моральное ожидание

Пусть $\Delta Z = k\frac{\Delta A}{A}$, где A - начальный капитал, $k > 0$ - какой-то коэффициент, Z - выгода от прироста капитала. Взяв дифференциал, получим $Z = k\ lnA$. Предположим, что капитал изменятся на сл.величину X, тогда $Z = k\ ln\ (X + A)$ - случайна величина, тогда

$$\mathbb{E}\ k\ ln\ (X + A) = k\ ln\ (\mathbf{M_r} + A),$$

где M_r - моральное ожидание.
Для дискретной сл.величины, которая принимает значения ξ_i с вероятностью p_i :

$$M_r = \prod_{i=1}^{n} (\xi_i + A)^{p_i} - A$$

7. Квантиль

X_q — квантиль распределения

$$F_{\xi}, (q \in (0,1)) = \begin{cases} \mathbb{P}(\xi < X_q) \leq q \\ \mathbb{P}(\xi \leq X_q) \geq q \end{cases}$$

Если $F_{\xi}(X_q)$ непрерывна в X_q, то квантиль однозначно определяется из уравнения $F_{\xi}(X_q) = q$

8. Медиана

$\operatorname{med}\xi = X_{\frac{1}{2}}$. Медиана всегда существует, устойчива к выбросам, но не всегда единственна. Например, в дискретном случае:

$$\xi = \begin{cases} 0, & \mathbb{P} = \frac{1}{2} \\ 1, & \mathbb{P} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

В этом случае, $\operatorname{med}\xi = x, \forall x \in [0,1]$

9. Мода (Формулы в дискретном и непрерывном)

Мода — наиболее ожидаемое значение случайной величины.

1. Для дискретной случайной величины $\operatorname{mod}\xi = \{x_i \mid \mathbb{P}\ (\xi = x_i) \geq \mathbb{P}\ (\xi = x_k), \forall\ k,\ k \in\ \mathcal{N}\}$
2. Для абсолютно непрерывной случайной величины с кусочно-непрерывной плотностью $f_{\xi}(x) : \operatorname{mod}\xi = \{x \mid f_{\xi}(x) \geq f_{\xi}(y)\ \forall y \in \mathcal{R}\}$ - точка максимума плотности (или локального максимума)

Мода всегда определена, но может быть не единственной.

10. Случайная величина

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. **Случайной величиной** называется действительная функция элементарного события $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$, которая обладает свойством измеримости:

$$\xi^{-1}(B) \equiv \{\omega \mid \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}$$

11. Распределением случайной величины ξ

называется функция $\mathbb{P}_{\xi} : \mathcal{B} \to \mathcal{R}$, определенная для любого $B \in \mathcal{B}$ по правилу

$$\mathbb{P}_{\xi}(B) = \mathbb{P}(\xi \in B)$$

Если случайная величина имеет распределение $\mathbb{P}_{\xi}$ говорят также, что случайная величина распределена по закону $\mathbb{P}_{\xi}$.

12. Функцией распределения

случайной величины ξ называется отображение $F_{\xi} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, определенное по правилу:

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi < x)\ or\ F_{\xi}(x) = \mathbb{P}_{\xi}((-\infty; x))$$

для всех $\mathcal{R}$.

Свойства:

1. $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$
2. $F_{\xi}(x)$ не убывает
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{\xi}(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F_{\xi}(x) = 1$
4. $F_{\xi}(x)$ непрерывна слева

13. Дисперсия

$\mathsf{D}_\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

1. Дискретный случай: $\mathsf{D}_\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2\ p_i - (\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\ p_i)^2$
2. Абс. непрерывный случай: $\mathsf{D}_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\ f_\xi(x)\,dx - (\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ f_\xi(x)\,dx)^2$

Дисперсия характеризует степень разброса случайной величины около ее мат.ожидания.
Свойства:

1. $\mathsf{D}_\xi \geq 0,\ \mathsf{D}_\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = c$ п.в.
2. $\mathsf{D}_{c\xi} = c^2\,\mathsf{D}_\xi\ \ \mathsf{D}_{a+\xi} = \mathsf{D}_\xi\ \ \forall a, c \in \mathcal{R}$

$\sigma = \sqrt{\mathsf{D}_\xi}$ - среднеквадратичное отклонение

14. Интерквартильный размах

$IQL = X_{\frac{3}{4}} - X_{\frac{1}{4}}$, где $X_{\frac{3}{4}}$ - квантиль порядка $\frac{3}{4}$, а $X_{\frac{1}{4}}$ - квантиль порядка $\frac{1}{4}$

15. Независимость событий

События A и B независимы, если $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

16. Независимость совокупности событий

События $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если $\forall 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n$:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) \ = \ \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

17. Случайные величины ξ и η независимы,

если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}(\xi \in B_1,\ \eta \in B_2) = \mathbb{P}(\xi \in B_1)\ \mathbb{P}(\eta \in B_2)$$

18. Ковариация

$$cov\ (\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\ \mathbb{E}\eta$$

, она линейна по каждому аргументу

19. Коэффициент корреляции

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov\ (\xi, \eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\,\xi}\sqrt{\mathsf{D}\,\eta}}$$

20. Коэффициент корреляции Пирсона

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ - НОРСВ

$$\hat{c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})\ (Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\ \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

21. Коэффициент корреляции Кендела

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ - НОРСВ.
$(x_i, y_i),\ (x_j, y_j)$ - согласованные пары, если $sgn(x_i - x_j)\ sgn(y_i - y_j) = 1$

$$T = \sum_{i<j} sgn(x_i - x_j)\ sgn(y_i - y_j)$$

Коэффициент корреляции Кендела:

$$\tau = \frac{T}{T_{max}} = \frac{2T}{n(n-1)},\ \mid \tau \mid \leqslant 1$$

22. Коэффициент корреляции Спирмена

$(RX_1, \ldots, RX_n)$ - распр. $X, RY_1, \ldots, RY_n$ - распр. Y (НОРСВ)

$$\gamma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(RX_i - \bar{RX})\ (RY_i - \bar{RY})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(RX_i - \bar{RX})^2\ \sum\limits_{i=1}^{n}(RY_i - \bar{RY})^2}} = 1 - \frac{6}{n(n-1)(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(RX_i - RY_i)^2$$

$\mid \gamma \mid \leqslant 1$

23. Сходимости

Пусть $X_1, X_2 \ldots$ - случ.величины, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ сходятся к X:

- **Почти наверное**, с вероятностью 1, если

$$\mathbb{P}(\ \omega \mid \lim_{n\to\infty}\ X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

- **По вероятности**, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Обозн. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

- **В среднем порядка** $r > 0$, если

$$\mathbb{E}|X_n - X|^r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Обозн. $X_n \xrightarrow{r} X$

- **Слабо**, если $\forall \varphi(x)$: непрерывной и ограниченной на $\mathcal{R}$:

$$\mathbb{E}\varphi(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\varphi(X)$$

  Обозн. $X_n \xrightarrow{\omega} X$

- **По распределению**, если

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$$

  во всех точках непрерывности $F(x)$. Обозн. $X_n \Rightarrow X$ или $X_n \xrightarrow{d} X$

24. Центральная предельная теорема

$X_1, \ldots, X_n$ - НОРСВ. $\mathbb{E}X_i = a, \mathsf{D}\,X_i = \sigma^2\ (0 < \sigma^2 < \infty), \forall i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \Phi(x),$$

(равномерно по x)

где $\Phi(x)$ - функция распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}}\,du$

25. Неравенство Берри-Эссеена

$X_1, \ldots, X_n$ - НОРСВ. $\mathbb{E}X_i = a,\ \mathsf{D}\,X_i = \sigma^2\ (0 < \sigma^2 < \infty)$. $\exists \mu_3 = \mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^3,\ \forall i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C_0\ \mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

$$0,4 \leq C_0 \leq 0,5$$

Скорость сходимости: $O\ (\frac{1}{\sqrt{n}})$

26. Условие Линдеберга

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - нез.сл.в, $\mathbb{E}\xi_i = a_i,\ \mathsf{D}\,\xi_i = \sigma_i^2,\ (0 < \sigma^2 < \infty),\ F_i(x)$ - ф.р. $\xi_i, A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $B_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2,\ F_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - A_n}{B_n} < x\right) \forall t > 0$:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \int\limits_{|x-a_i|\ >\ tB_n} |x - a_i|^2\,dF_i(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Здесь $F_i(x)$ — функция распределения i-й случайной величины.

27. Теорема Линдеберга-Феллера

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - нез.сл.в, $\mathbb{E}\xi_i = a_i,\ \mathsf{D}\,\xi_i = \sigma_i^2,\ \ (0 < \sigma^2 < \infty),\ F_i(x)$ - ф.р. ξ_i и выполнено условие Линдеберга, тогда

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

и справедливо условие равномерной предельной малости:

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\ \mathbb{P}(|\xi_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0,\ \forall \varepsilon > 0$$

28. Теорема Ляпунова

Если $\exists \mathbb{E}|\xi_i - \mathbb{E}\xi_i|^3 = \mu_i^3,\ M_n^3 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^3,\ \frac{M_n^3}{B_n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то справедлива центральная предельная теорема, т.е. $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \Phi(x)$ (равномерно по x)

29. УЗБЧ

$X_1, \ldots, X_n$ - НОРСВ, определены на одном вероятностном пространстве. $\mathbb{E}X_i = a,\ a < \infty\ \forall i \ \Leftrightarrow\ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \underset{\text{п.в}}{\longrightarrow} a$

Скорость сходимости: $O\ (\frac{1}{\sqrt{n}})$ при условии существования второго момента $\mu_2 = \mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^2$

30. Теорема Пуассона

Пусть $\{X_{n,i}\}$ - схема серий,

$$X_{n,i} \sim \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & q_n = 1 - p_n \end{cases}$$

Пусть так же $np_n \to \lambda > 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!};\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i},\ \forall k = 0, 1, \ldots$$

31. Устойчивая функция распределения

Функция распределения $G(x)$ и соответствующая ей характеристическая функция $g(t)$ называются устойчивыми, если $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+,\ \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}\ \exists a > 0, b \in \mathbb{R}$

$$G_1(x) = G(a_1 x + b_1), G_2(x) = G(a_2 x + b_2)$$

$$G_1 * G_2(x) = G(ax + b)$$

Это условие эквивалентно тому, что для тех же условий: $g(a_1 t)g(a_2 t) = e^{ibt} g(at)$
Свёртка: $F * G(x) = \int F(x - y) dG(y)$

32. Теорема Леви

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — НОРСВ, определённые на одном вероятностном пространстве. Тогда функция распределения $F(x)$ может быть предельной для сумм вида:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - a_n}{b_n}$$

при некоторых $\{a_n\} \in \mathbb{R},\ \{b_n\} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow F(x)$ устойчива.

33. Безгранично делимая ф.р

Функция распределения $F(x)$ и соответствующая ей характеристическая функция $f(t)$ называется безгранично делимой, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f_n(t)\colon f(t) = (f_n(t))^n$, где $f_n(t)$ тоже характеристическая функция некоторой случайной величины. $f(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Соответствующая этой характеристической функции случайная величина также называется безгранично делимой.

34. Теорема Хинчина

Пусть $\{X_{n,i}\}$ - схема серий, $X_{n,i}$ - нез.сл.в. и

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \to \infty} \sup_{1 \leq j \leq m_n} \mathbb{P}(|X_{n,j}| > \varepsilon) = 0$$

- условие равномерной предельной малости. Тогда функция распределения $F(x)$ может быть предельной для сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{m_n} X_{n,i}$ при $\Leftrightarrow F(x)$ соответствует безгранично делимая характеристическая функция.

35. Информация по Шеннону

Пусть A, B — события, $\mathbb{P}(A) > 0,\ \mathbb{P}(B) > 0$. Информация, содержащаяся в B относительно A,

$$I(A \mid B) = \log_a \frac{\mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(A)}, a > 1!!$$

При $A = B:\ \ I(A \mid B) = \log \frac{1}{\mathbb{P}(A)} = -\log \mathbb{P}(A)$. Свойства информации: 1) Чем больше $\mathbb{P}(A)$, тем меньше $I(A)$. 2) Если A и B независимы, то $I(A \mid B) = 0$. 3) Если A и B независимы, то $I(AB) = I(A) + I(B)$.

36. Энтропия

- мера неопределённости эксперимента. $Q(E)$ — количество информации, полученное в ходе эксперимента E с n исходами, принимает значения $I(A_i)$ с вероятностью $\mathbb{P}(A_i) = p_i$. Энтропия эксперимента:

$$H(E) = \mathbb{E}Q(E) = \sum_{i=1}^{n} I(A_i)\mathbb{P}(A_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

37. Дифференциальная энтропия

$H(\xi) = -\mathbb{E} log_a p(x)\ \ a > 1,$ где ξ - абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ - плотность ξ

38. Теорема о распределении с наибольшей дифференциальной энтропией

1. Равномерно распределённая на $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ случайная величина имеет наивысшую энтропию среди всех случайных величин, распределённых на $[-a, a]$.

$$\xi \sim R[-a, a] \Rightarrow \forall \eta\colon \mathbb{P}(|\eta| \leqslant a) = 1,\ H(\xi) \geq H(\eta).$$

2. Показательное распределение с параметром λ имеет наибольшую энтропию среди всех распределений, определённых на полуоси с мат. ожиданием $\frac{1}{\lambda}$

$$\xi \sim \Pi(\lambda) \Rightarrow \forall \eta\colon \mathbb{P}(\eta \geqslant 0) = 1, \mathbb{E}\eta = \frac{1}{\lambda}, (\lambda > 0),\ H(\xi) \geqslant H(\eta).$$

3. На всей прямой, среди всех распределений с фиксированными мат. ожиданием и дисперсией, наибольшей энтропией обладает нормальное распределение.

$$\xi \sim N(a, \sigma^2) \Rightarrow \forall \eta\colon \mathbb{E}\eta = a, \mathbb{D}\eta = \sigma^2\ H(\xi) \geqslant H(\eta).$$

39. Случайный процесс

- семейство сл.величин $X(t, \omega)$, определённых на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\forall t \in T \subset \mathbb{R}$.
При любом фиксированном $\omega_0 \in \Omega\colon X(t, \omega_0)$ — **траектория** случайного процесса.
Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — тоже случайный процесс, с дискретным временем.

40. Распределение случайного процесса

— мера $\mathbb{P}_X\colon \forall A \in \Sigma,\ \mathbb{P}_X(A) = P(\{\omega \mid X(w) \in A\})$

41. Процесс с независимыми приращениями

Случайный процесс $X(t)$ — процесс с независимым приращением, если $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in T$, случайные величины

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

42. Однородный процесс

Случайный процесс $X(t), \forall t \in T \subset \mathbb{R}$ — однородный, если $\forall t, s, t{+}h, s{+}h \in T \Rightarrow\ X(t{+}h){-}X(t)$ и $X(s + h) - X(s)$ имеют одинаковое распределение. $h > 0$

43. Пуассоновский процесс

- процесс $X(t)$ называется однородным пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ (среднее кол-во скачков за ед. времени), если

- $X(t)$ имеет независимое приращение;
- $X(t)$ однородный;
- $X(0) = 0$ почти наверное (с вероятностью 1);
- При $h \downarrow 0,\ h > 0:$
  1. $\mathbb{P}(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
  2. $\mathbb{P}(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
  3. $\mathbb{P}(X(h) \geqslant 2) = o(h)$

44. Информационные свойства пуассновского процесса

Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — времена скачков пуассоновского процесса.

1° Время ожидания между скачками пуассоновского процесса имеет показательное распределение.

2° Теорема.

Рассмотрим отрезок $[a, b]$ на временной оси. $X(b) - X(a) = n$ — число скачков на отрезке $[a, b]$. Условное распределение моментов скачков $\tau_1, \ldots, \tau_n,\ \tau_i \in [a; b]\ \forall\ i\ \in\ [1; n]$, при условии $X(b) - X(a) = n$ совпадает с распределением вариационного ряда, построенного по выборке из равномерного распределения длины n на $[a, b]$

3° Иногда сюда добавляют ЦПТ для пуассоновского процесса.

Пусть $X(t)$ - пуассоновский процесс.

$$\mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) \underset{\lambda t \to \infty}{\rightrightarrows} \Phi(x) \sim N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Скорость сходимости: $\Delta(\lambda t) = \left|\mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$, где C_0 — константа из неравенства Берри-Эссеена.

45. Случайная сумма

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — НОРСВ; N — целочисленная неотрицательная случайная величина;
$\xi_1, \ldots, \xi_n, N$ определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и независимы.

Случайной суммой S_N называется $S_N(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{N(\omega)} \xi_i(\omega)$, где
$F(x)$ — функция распределения ξ_i
$p(x)$ — плотность ξ_i
$f(t)$ — характеристическая функция ξ_i $(f(t) = \mathbb{E}e^{it\xi})$
$\psi(x)$ — производящая функция N $(\psi(s) = \mathbb{E}s^N,\ |s| \leqslant 1)$
$p_n = \mathbb{P}(N = n)$

46. Свойства случайных сумм:

1° $F_{S_N}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$, где F^{*n} — n-кратная свёртка F; (F^{*0} — функция распределения с единичным скачком в нуле).

$F^{*n} = \mathbb{P}(S_n < x) = \mathbb{P}(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i < x)$

2° Если $p_0 > 0$, то $F_{S_N}(x)$ не является абсолютно непрерывной, даже если все ξ_i абсолютно непрерывны.

Если $p_0 = 0$ и существует плотность у ξ_i, то существует плотность $p_{S_N}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n p^{*n}(x)$, где $p^{*n}(x)$ — n- кратная свёртка $p(x)$

3° $f_{S_N} = \psi(f(t))$

4° $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N\mathbb{E}\xi_i$; $\mathbb{D}S_N = \mathbb{D}N(\mathbb{E}\xi_i)^2 + \mathbb{E}N\mathbb{D}\xi_i$

47. Пуассоновские случайные суммы и ЦПТ для них

Если $N \sim \Pi(\lambda)$, то $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i$ — пуассоновская случайная сумма.

ЦПТ

Рассмотрим $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — НОРСВ, заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть $\exists\mathbb{E}\xi_i = a$ (конечное), $\exists\mathbb{D}\xi_i = \sigma^2$ (тоже конечная). $N \sim \Pi(\lambda)$; N и ξ_i независимы $\forall\lambda > 0$. Тогда при $S_\lambda = \sum\limits_{i=1}^{N_\lambda} \xi_i$ выполняется:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) \underset{\lambda\to\infty}{\rightrightarrows} \Phi(x)$$

Если $\exists\mathbb{E}|\xi_i|^3 < \infty$, то можно записать неравенство Берри–Эссеена:

$$\sup_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x)\right| < \frac{LC_0}{\sqrt{\lambda}},$$

где

$$L = \frac{\mathbb{E}|\xi_i|^3}{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Здесь C_0 - константа Берри–Эссеена.

48. Геометрическая случайная сумма

Если в случайной сумме S_M число слагаемых M имеет геометрическое распределение $\mathbb{P}(M = n) = p(1-p)^n, n = 0, 1, 2, \ldots$, то случайная сумма S_M называется геометрической случайной суммой.

49. Характеристическая функция геометрической случайной суммы:

$$f_{S_N}(t) = \frac{p}{1-(1-p)f(t)},$$

где $f(t)$ - хар. функция слагаемых.

50. Теорема Реньи

Пусть $G(x)$– функция распределения стандартного показательного закона. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — НОРСВ, $X_i \overset{\text{п.н}}{\geqslant} 0$ и $a = \mathbb{E}X_i,\ 0 < a < \infty, \forall i \in [1;n]$. $S_M = \sum\limits_{i=1}^{M} X_i$. $M \sim Geom(p)$.

Тогда

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{p}{a}S_M < x\right)\right| \underset{p\to 0}{\longrightarrow} G(x).$$

Если $b^2 = \mathbb{E}X_i^2$, тогда

$$\sup_x \left|P\left(\frac{p}{a}S_M < x\right) - G(x)\right| \leqslant \frac{pb^2}{(1-p)a^2}$$

$$G(x) = \begin{cases} (1-e^{-x}), & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

51. Связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами

Любая геометрическая случайная сумма является пуассоновской случайной суммой.

Пусть S_M - геом. сл. сумма $S_M = X_1 + \ldots + X_M$,
$X_1 + \cdots + X_M \overset{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_N$ (имеют одинаковое распределение), где $N \sim \Pi(log\frac{1}{p})$, случайные величины Y_j независимы и имеют одно и то же распределение $\forall j \in [1;N]$.
$Y_j \overset{d}{=} X_1 + \ldots + X_L$, где L имеет логарифмическое распределение

$$\mathbb{P}(L = k) = \frac{1}{ln\frac{1}{p}}\ \frac{(1-p)^k}{k},\ k = 1, 2, \ldots$$

и незав. от $X_1, X_2, \ldots$

52. Обратная связь

Пусть S_N — пуассоновская случайная сумма с характеристической функцией $f(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$. Если функция $g(t) = \frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}}$ является характеристической, то $S_N \overset{d}{=} S_M$, где S_M — геометрическая случайная сумма, $S_M = Y_1 + \cdots + Y_M$, где случайные величины $M, Y_1, Y_2, \ldots$ независимы, причём M имеет геометрическое распределение с $p = e^{-\lambda}$, а $Y_1, Y_2, \ldots$ одинаково распределены с общей характеристической функцией $g(t)$.

53. Теорема переноса

Пусть $\{X_{n,j}\}_{j\geqslant 1}, n = 1, 2, ...$ - схема серий независимых и одинаково в каждой серии распределенных случайных величин, а $N_n, n = 1, 2, ...$ - положительные целочисленные случайные величины такие, что при каждом n случайная величина N_n независима от последовательности $\{X_{n,j}\}_{j\geqslant 1}$. Для натуральных k обозначим $S_{n,k} = X_{n,1} + ... + X_{n,k}$ Предположим, что существует неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ и функции распределения $H(x)$ и $A(x)$ такие, что:

$$\mathbb{P}\ (S_{n,m_n} < x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(x),$$

$$\mathbb{P}\ (\frac{N_n}{m_n} < x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A(x),$$

Тогда существует функция распределения $F(x)$ такая, что

$$P(S_{n,N_n} < x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x).$$

При этом функция распределения $F(x)$ соответствует характеристической функции

$$f(t) = \int\limits_0^\infty h^u(t)dA(u), t \in R,$$

где $h(t)$ - характеристическая функция, соответствующая функции распределения $H(x)$.

54. Аналог теоремы Пуассона для сл.сумм сл. индикаторов

Рассмотрим семейство последовательностей случайных величин $\{X_{p,j}, j \geqslant 1, 0 < p < 1\}$ такое, что при каждом фиксированном p случайные величины $X_{p,1}, X_{p,2}, ...$ имеют одно и то же распределение Бернулли $\mathbb{P}(X_{p,j} = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_{p,j} = 0) = 1 - p$.

Пусть $\{N_p, 0 < p < 1\}$ - семейство положительных целочисленных случайных величин. Предположим, что при каждом фиксированном p случайные величины $N_p, X_{p,1}, X_{p,2}, ...$ независимы.

Положим $S_p = \sum\limits_{j=1}^{N_p} X_{p,j}$. Предположим, что существует собственная случайная величина N такая, что

$$pN_p \underset{p\to 0}{\Longrightarrow} N.$$

Тогда

$$S_p \underset{p\to 0}{\Longrightarrow} S,$$

где S - дискретная случайная величина с распределением

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-z}z^k dP(N \leqslant z),\ k = 0, 1, 2, ...$$

55. Теорема переноса для центрированных случ.сумм

Пусть $\{X_{ni}\}$ - схема серий, а $\{a_n\}, \{c_n\}$ - последовательности действительных чисел, m_n - последовательность натуральных чисел. Везде $n \geqslant 1$. Пусть для некоторых сл.в. Y, U, V, при $n \to \infty$:

$$S_{n,m_n} - a_n \Rightarrow Y;\ \frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U;\ a_n\frac{N_n}{m_n} - c_n \Rightarrow V$$

Тогда при $n \to \infty$

$$S_{n,N_n} - c_n \Rightarrow Z,$$

где Z - случайная величина с характеристической функцией

$$f(t) = \mathbb{E}[h^U(t)e^{itV}],\ t \in \mathbb{R}$$

56. Смесь вероятностных распределений

$F(x, y)$ определена на множестве $\mathbb{R}\times Y,\ Y \subseteq \mathbb{R}^m$ при $m \geqslant 1$, множество Y снабжено σ-алгеброй Σ. Предположим, что при каждом фиксированном y функция $F(x, y)$ является функцией распределения по x, а при каждом фиксированном x функция $F(x, y)$ измерима по y. Пусть G – вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве (Y, Σ). Функция распределения

$$H(x) = \int\limits_Y F(x, y)G(dy),\ x \in \mathbb{R}$$

называется смесью функции распределения F(x, y) по y относительно G. Распределение F(x, y) называется смешиваемым, в то время как мера G задает смешивающее распределение.

57. Сдвиг-масштабная смесь

$H(x) \sim XU + V;\ H(x) = \mathbb{E}F(\frac{X-U}{V})$,
где $X \sim \mathcal{N}(0;1),\ U > 0,\ V \in \mathbb{R};\ X, (U, V)$ - независимы

58. Идентифицируемая смесь

F(x, y) определена на множестве $\mathbb{R}\times Y,\ Y \subseteq \mathbb{R}^m$ при $m \geqslant 1$, множество Y снабжено σ-алгеброй Σ. Предположим, что при каждом фиксированном y функция $F(x, y)$ является функцией распределения по x, а при каждом фиксированном x функция $F(x, y)$ измерима по y. Пусть $\mathcal{Q}$ – смесь случайных величин на (Y, Σ). Обозначим

$$\mathcal{H} = \{H(x) : H(x) = \mathbb{E}F(x, Q),\ x \in \mathbb{R},\ Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Семейство $\mathcal{H}$ называется идентифицируемым, если $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$:

$$\mathbb{E}F(x, Q_1) = \mathbb{E}F(x, Q_2) \Longrightarrow Q_1 \overset{d}{=} Q_2.$$

59. Неоднородный пуассоновский процесс

$N^*(t)$:

1. $N^*(0) = 0$ почти наверное;
2. $\mathbb{P}(N^*(t) = k) = \frac{\Lambda^k(t)e^{-\Lambda(t)}}{k!}$;

$\Lambda(t)$ - интенсивность пуассоновского процесса
$\mathbb{P}(N_1(\Lambda(t)) = k) = \mathbb{P}(N^*(t) = k)$, т.е. $N_1(\Lambda(t))$ и $N^*(t)$ стохастически эквивалентны.

60. Процесс Кокса

Пусть $\Lambda(t)$ — случайный процесс:

1. $\Lambda(0) = 0$ почти наверное;
2. $\forall t \in T,\ \Lambda(t) < \infty$ почти наверное;
3. $\Lambda(t)$ не убывает и имеет непрерывные справа траектории.
4. $\Lambda(t)$ и $N_1(t)$ независимы.

Тогда $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ — дважды стохастический пуассоновский процесс, или процесс Кокса с управляющим процессом $\Lambda(t)$, где $N_1(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 1$ (стандартный)

61. Обобщенный процесс Кокса

Пусть $X_1, , X_2, \dots$ - НОРСВ, заданные на одном вероятностном пространстве. $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ — процесс Кокса (дважды стохастический пуассоновский процесс). $N_1(t), X_1, \dots, X_n, \dots$ независимы. Тогда $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} X_i$ — обобщённый процесс Кокса.

62. ЦПТ для обобщенных процессов Кокса

Пусть $\mathbb{D}X_i = \sigma^2,\ d(t) > 0$ — функция, неограниченно возрастающая при $t \to \infty$. $S(t)$ - обобщ.процесс Кокса. Предположим, что $\Lambda(t) \underset{t\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \infty$. Для того, чтобы одномерные распределения нормированного обобщенного процесса Кокса слабо сходились к распределению некоторой с.в. Z:

$$\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} Z$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная с.в. U такая, что:

1. $P(Z < x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) d\mathbb{P}(U < y), x \in R$
2. $\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} U$

Следствие:
В условиях теоремы, сформулированной выше

$$\mathbb{P}\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \Phi(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} 1$$

63. ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса

Пусть $\mathbb{E}X_i = a \neq 0,\ S(t)$ — обобщенный процесс Кокса, $\Lambda(t) \underset{t\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \infty$

$$\frac{S(t)}{t} \Longrightarrow \mathbb{Z} \Longleftrightarrow\ \exists U:\ \frac{\Lambda(t)}{t} \Longrightarrow U,$$

причем $\mathbb{Z} = aU$ (по распределению).

64. Критерий сходимости одномерного распределения обобщенных процессов Кокса к строго устойчивым законам

Пусть $G_{\alpha,0}(x)$ - ф.р. строго устойчивого закона. $\Lambda(t) \underset{t\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \infty$. $\mathbb{E}X_i = 0$. $S(t)$ - ОПК. $d(t) > 0$ - неогр. возраст. функция $\alpha \in [0; 2]$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} G_{\alpha,0}(x) \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < x\right) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} G_{\frac{\alpha}{2},1}(x)$$

$$G_{\alpha,0}(x) = \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG_{\frac{\alpha}{2},1}(y)$$

65. Коэффициент эксцесса (+св-ва)

Островершинность распределения характеризуется коэффициентом эксцесса. Если $EZ^4 < \infty$ то

$$\varkappa(Z) = \frac{\mathbb{E}\left(Z - \mathbb{E}Z\right)^4}{\sqrt{\mathbb{D}Z}^4}$$

У норм.распределения $\varkappa(Z) = 3$ - характериз. норм. закон среди всех безгранично делимых распределений.
Свойство:
Пусть $\mathbb{E}\xi = 0,\ \mathbb{P}(\eta > 0) = 1,\ \mathbb{E}\xi^4 < \infty,\ \mathbb{E}\eta^4 < \infty$. Тогда

1. $\varkappa(\xi\eta) \geqslant \varkappa(\xi)$;
2. $\varkappa(\xi\eta) = \varkappa(\xi) \Leftrightarrow \eta = \mathrm{const}$ почти всюду.

66. Метрика Леви

$F(x)$ - ф.р. с.в. X; $G(x)$ - ф.р. с.в. Y
$L(X, Y) = inf\ \{h > 0 : G(x - h) - h \leqslant F(x) \leqslant G(x + h) + h\}\ \forall x \in \mathbb{R}$ - метрика Леви.

67. Оценка расстояния Леви между чистым нормальным законом и двухкомпонентной смесью нормальных законов через расстояние Леви между двухточечным смешивающим распределением и вырожденным распределением

Пусть $p \in [0; 1],\ \mid a \mid < 1$ и $L(\Phi, G_{p,a}) < \varepsilon$. Тогда

$$L(0, V_{p,a}) \leqslant c\ \varepsilon^{\frac{1}{2}},\ \text{где } c = (\sqrt{e}(1 + \sqrt{2\pi}))^{\frac{1}{2}}$$

$$V_{p,a} = \begin{cases} 0, & p \\ a, & 1 - p \end{cases}$$

$G_{p,a}$ - сдвиговая смесь.